ВИСША МАТЕМАТИКА-3

ПРИМЕРНИ ТЕМИ 2011

Г.П.Паскалев

Т Е М А 1

Задача 1: Да се пресметне интегралът:

$$\int_{|z-i|=2} \frac{(z+1)}{z^2(z^2+4)} dz\,; \qquad \text{или} \qquad \int_0^{2\pi} \frac{1}{13+12\sin x} dx\,;$$

Задача 2: Решете задачата на Коши с помощта на преобразованието на Лаплас:

$$y''-3y'+2y=\cos t\,; \quad y(0)=0,\ y'(0)=0\,; \qquad \text{или} \qquad y''+4y=e^{2t}\,; \quad y(0)=0,\ y'(0)=1\,;$$

Задача 3: Развийте в ред на Фурие функцията с период 2π, ако

$$f(x)=x\,, -\pi\le x<\pi\,; \qquad \text{или} \qquad f(x)=\frac{(\pi-x)}{2}, 0\le x<2\pi\,;$$

ВИСША МАТЕМАТИКА-3

ПРИМЕРНИ ТЕМИ 2011

Г.П.Паскалев

Т Е М А 2

Задача 1: Да се пресметне интегралът:

$$\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\ln(z+2)}{z^3}dx\,; \qquad \text{или} \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}dx\,;$$

Задача 2: Решете задачата на Коши с помощта на преобразованието на Лаплас:

$$y''+4y'+4y=e^{-t}; \quad y(0)=0,\ y'(0)=0; \qquad \text{или} \qquad y''-9y=\cos 2t; \quad y(0)=0,\ y'(0)=1;$$

Задача 3: Развийте в ред на Фурие функцията с период 2π, ако:

$$f(x)=|x|,\ x\in[-\pi,\pi]; \qquad \text{или} \qquad f(x)=x^2,\ x\in[-\pi,\pi];$$

ВИСША МАТЕМАТИКА-3

ПРИМЕРНИ ТЕМИ 2011

Г.П.Паскалев

Т Е М А 3

Задача 1: Да се намери аналитичната функция

$f(z)=u+iv$, ако е дадена нейната реална(имагинерна) част

$u(x,y)=1-e^{-x}\sin y$ или $v(x,y)=y-2xy$;

и началното условие съответно

$f(0)=1$; или $f(0)=0$;

Задача 2: Решете задачата на Коши с помощта на преобразованието на Лаплас:

$y''+2y'+y=t$; или $y''+4y'+3y=\sin 3t$;

$y(0)=0, y'(0)=0$; $y(0)=1, y'(0)=0$;

Задача 3: Пресметнете потока на векторното поле

$\vec{a}=(y^2+xz)\vec{i}+(yx-z)\vec{j}+(yz+x)\vec{k}$; или $\vec{a}=(x-y^2)\vec{i}+(y-x^2)\vec{j}+(z-x^2)\vec{k}$;

през повърхнината на цилиндъра съответно

$x^2+y^2=4$, или $(x-1)^2+(y-2)^2=8$,

заключена между равнините $z=0$ и $z=\sqrt{2}$ (по посока на външната нормала)

ВИСША МАТЕМАТИКА-3

ПРИМЕРНИ ТЕМИ 2011

Г.П.Паскалев

Т Е М А 4

Задача 1: Да се пресметне интегралът:

$$\int\limits_{\left|z+\frac{3}{2}i\right|=2} \frac{z-1}{(z^2-2z+5)^2}\,dz\,; \qquad \text{или} \qquad \int\limits_{|z|=3} \frac{z^2}{z^3+8}\,dz\,;$$

Задача 2: Решете задачата на Коши с помощта на преобразованието на Лаплас:

$$y''+y=2\cos t\,; \qquad \text{или} \qquad y''+2x'+5y=3\,;$$

$$y(0)=0,\ y'(0)=-1\,; \qquad\qquad y(0)=1,\ y'(0)=0\,;$$

Задача 3: Намерете циркулацията на векторното поле

$$\vec{a}=x\vec{i}-2z^2\vec{j}+y\vec{k} \qquad \text{или} \qquad \vec{a}=x^2\vec{i}+z\vec{j}+y^2\vec{k}$$

по линията Γ, получена при пресичане на цилиндъра $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ съответно с равнината:

$$z=2x-y+1 \qquad \text{или} \qquad z=x+y\,;$$

Допълнителни задачи

Да се пресметнат интегралите:

1. $\int\limits_{|z|=\frac{5}{2}} \frac{e^{iz}}{(z^2-5z+6)^2}dz$; 2. $\int\limits_{|z-1-i|=2} \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}dz$; 3. $\int\limits_{|z-2i|=2} \frac{\cos z}{(z^2-2z+2)^2}dz$;

4. $\int\limits_{|z|=2} \frac{z^3}{(z^4-1)}dz$; 5. $\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{(z-1)^2(1-e^{2z})}dz$; 6. $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{z}{(2z-\pi)cosz}dz$;

7. $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{zcos\,z}dz$; 8. $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$; 9. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}dx$;

10. $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+16)}dx$; 11. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+16)(x^2+9)}dx$; 12. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(6-x)sinx}{(x^2-2x+26)}dx$;

13. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{5}\sin x+3}dx$; 14. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{(3+cosx)^2}dx$; 15. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 2x}{5-4\cos x}dx$;

Решете задачите на Коши с помощта на преобразованието на Лаплас:

1. $y''+2y'+5y=3$; $y(0)=1$; $y'(0)=0$;
2. $y''-2y'-3y=e^{3t}$; $y(0)=y'(0)=0$;
3. $y''+y=-sin2t$; $y(\pi)=-y'(\pi)=1$;
4. $y''-2y'+y=1+e^t$; $y(0)=-y'(0)=1$;
5. $y'''+y=1$; $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$;
6. $y''+2y'+y=e^{-t}(\cos t+t)$; $y(0)=-y'(0)=2$;
7. $y'''+3y''+3y'+y=1$; $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$;
8. $y^{(iv)}+2y''+y=\sin t$; $y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0$;

Развийте в ред на Фурие функцията с период 2π, ако:

(i) $f(x)=x^3, 0\le x<2\pi$; или $f(x)=-x, -\pi\le x<0$; $f(x)=0, 0\le x<\pi$;

(ii) $f(x)=\frac{\pi}{2}-x, 0\le x<2\pi;$ или $f(x)=1, -\pi\le x<0, f(x)=-2, 0\le x<\pi;$

(iii) $f(x)=x\sin x, -\pi\le x<\pi;$ или $f(x)=e^x, 0\le x<2\pi;$

Развийте в ред на Фурие функцията с период $2l$, ако:

$f(x)=x^2, -l\le x<l;$ или $f(x)=x-\frac{1}{2}x^2, -l\le x<l;$

Да се намери аналитичната функция $f(z)=u+iv$, ако е дадена нейната реална(имагинерна) част и допълнително определящо условие:

(i) $u(x,y)=x^3-3xy^2, f(0)=0;$

(ii) $u(x,y)=x^2-y^2+xy, f(0)=0;$

(iii) $v(x,y)=xy+y, f(0)=0;$

(iv) $v(x,y)=(e^x-e^{-x})\sin y, f(0)=2;$

(v) $v(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y), f(0)=0;$

Пресметнете потока на векторното поле:

(i) $\vec{a}=(x-y)\vec{i}+(x+y)\vec{j}+z^2\vec{k}$ през повърхнината на цилиндъра $x^2+y^2=1$, заключена между равнините $z=0$ и $z=2$ (по посока на външната нормала)

(ii) $\vec{a}=2\vec{i}-x\vec{j}+5z\vec{k}$ през горната страна на повърхнината на триъгълника, получен при пресичането на равнината $x+2y+3z=6$ с координатните равнини.

Покажете, че векторното поле

(i) $\vec{a}=(1+y^2z^3)\vec{i}+(1+2xyz^3)\vec{j}+(1+3xy^2z^2)\vec{k};$

(ii) $\vec{a}=(2xy+z)\vec{i}+(x^2-2y)\vec{j}+x\vec{k};$

е потенциално и намерете неговия потенциал.